L.pilote Kairouan	Année 2007/2008
	Devoir de contrôle n°1
Section : $4^{iéme}$ Maths	Durée : 2heures
Epreuve : Mathématiques	Prof : Troudi Kamel

Exercice n°1(4points)

Cocher la seule réponse exacte

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-\frac{\pi}{2})tgx}$ alors $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ est égale:

a) -1 $\quad b)\ \dfrac{1}{2} \quad c)\ +\infty \quad d)$ n'existe pas∂.

2) On pose $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors l'expression de la fonction (fog)(x) est:

a) $\dfrac{2+\cos x}{\sin x} \quad b)\ tg(x) \quad c) -\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} \quad d) cotg(x)$

3) La forme exponentielle du complexe $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$ est:

a) $2e^{i\frac{\pi}{12}} \quad b)\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad c)\ \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} \quad d)\ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

4) l'ensemble des points M(z) tels que : $\arg(\dfrac{z-i}{z}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[\pi]$ est:

a) Un cercle privé d'un point b)Un cercle privé de deux points c) une demie droite privée d'un point.

Exercice n°2

Dans le plan complexe on note M le point d'affixe z

1°) Résoudre l'équation : f(z) = 1 + 2 i.

Mettre la solution z_0 sous la forme cartésienne.

Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe est z_0.

2°) Soit z un élément de E. On note r le module de z + i et α une mesure de son argument.

Mettre z + i puis f(z) – i sous la forme exponentielle.

Exprimer la forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et α.

3°) Soit A le point d'affixe – i.

a) Interpréter géométriquement les expressions : | z + i | et Arg (z + i).

Déterminer l'ensemble C des points M vérifiant $|f(z)-i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\dfrac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de f(z) – i.

b) Montrer que B appartient à C et D et construire C et D.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1°/ a)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur IR.

b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°/ a) Montrer que f est une bijection de IR sur] -1, 1 [et tracer la courbe C' de f^{-1} dans le même repère.

b) Trouver l'expression de $f^{-1}(x)$.Soit f l'application : de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \to f(z) = \dfrac{iz}{z+i}$.

Exercice n°4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$.

Soient (C) sa courbe dans un plan rapporté à repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Déterminer trois réels a, b, c tels que , pour tout x de IR \ {1}, on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b) Etudier les variations de f.

2°) a) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.

b) Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet, dans IR, une seule solution x_0 et que : $x_0 \in \ ]-2, -1[$.

c) Construire (C).

Solutions (Indication)

Exercice1 : : a-d-c-b

Exercice2 :

1°) $z_0 = \dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$; B (1/2 , - 3/2)

2°) $z + i = r e^{i\alpha}$ et $f(z) - i = \dfrac{1}{r}e^{-i\alpha}$.

$f(z) - i = \dfrac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.

3°) | z + i | = AM et $\operatorname{Arg}(z+i) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM})\,[2\pi]$.

C est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D est la demi-droite [A x) telle que : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{Ax}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ privée du point A.

Exercice3 :

1°) a) Continuité

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur IR donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur IR et par suite f est continue sur IR comme quotient de deux fonctions continues sur IR.

Dérivabilité

Si $x \in \ ]-\infty ; 0[$ $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et si $x \in \ ]0 ; +\infty[$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Donc f est dérivable sur chacun des deux intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$ car les fonctions rationnelles sont dérivables là où elles sont définies.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = 1$ donc f est dérivable en 0 et f'(0) = 1.

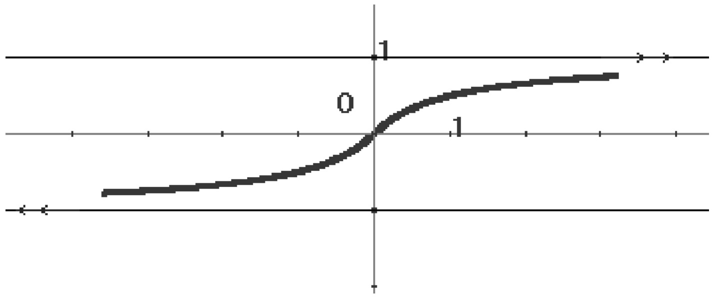
f est dérivable sur IR.

b) Si $x \in \ ]-\infty ; 0[$ $f'(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

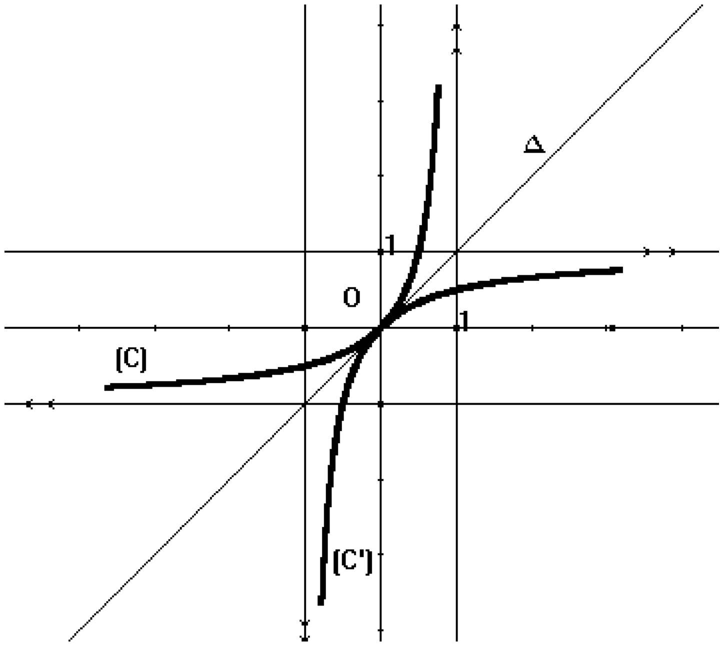
Si $x \in \ ]0 ; +\infty[$ $f'(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)' = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$.

X	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	-1	1



2°) a) f est strictement croissante sur IR donc f est une bijection de IR sur f<IR>.
f est continue et strictement croissante sur IR donc f<IR> = $\left]\lim_{-\infty} f\ ,\ \lim_{+\infty} f\right[=]-1\ ,\ 1[$.
(C') = S_Δ (C) où Δ : $y = x$.



b) Soit $x \in]-1 ; 1[$ et $y \in$ IR.
Si $x \geq 0$ alors $y \geq 0$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{1+y} = x$$
$$\Leftrightarrow y = x(1+y)$$
$$\Leftrightarrow y = x + xy$$
$$\Leftrightarrow y - xy = x$$
$$\Leftrightarrow y(1-x) = x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

Si $x \leq 0$ alors $y \leq 0$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x}$$

Dans les deux cas $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$.

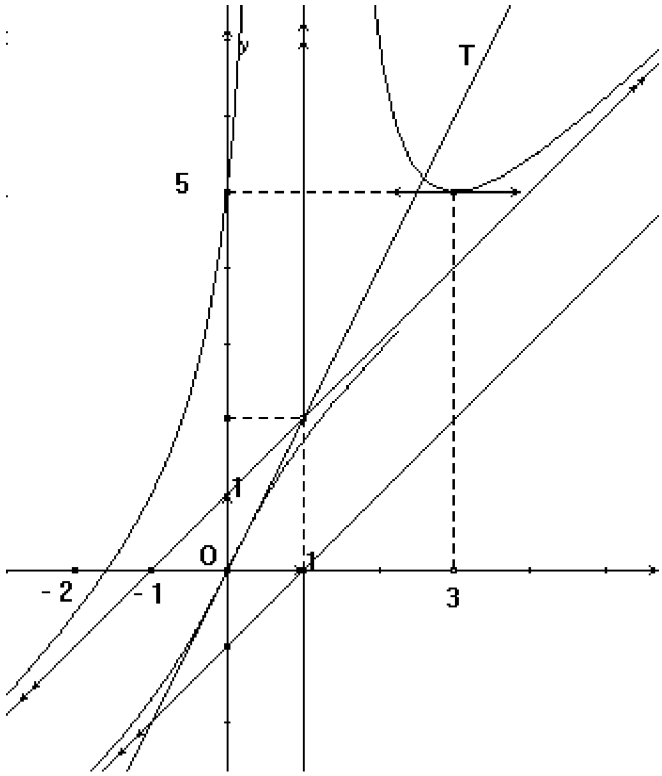
Exercice4 :

1°) a) $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{(x-9)(x^2+3)}{(x-1)^3}$.

2°) a) $f(x) - (x+1) = \dfrac{4}{(x-1)^2} > 0$: (C) est au dessus de son asymptote oblique $\Delta : y : x + 1$.

c)



3°) a) $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$.

b) E = IR.

c) $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$